

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)(\sqrt{1 + x^2})}$$

- b) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Calculer $g(1)$ et calculer $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$.
 - 4) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) a) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

- b) En déduire que la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}_f$, puis déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (Δ) .
- 3) Étudier les variations de la fonction f .
 - 4) Soit I le point d'intersection des deux asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Montrer que I est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
 - 5) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.
 - 6) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
 - 7) Construire (T) et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
- 4) Déterminer la droite (D) asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$, puis étudier la position relative de (D) et $\mathcal{C}_f$.
- 5) Étudier la concavité de la courbe $\mathcal{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion.
- 6) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
b) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer D , l'ensemble de définition de f .
b) Déterminer les limites de f aux bornes de D , puis interpréter les résultats obtenus.
c) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (D) d'équation : $y = 1$.
- 2) Étudier les variations de la fonction f .
- 3) Donner l'équation de la tangente (T') à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = -2$.
- 4) Construire (T') et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 5

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (x\sqrt{x} - 1)^2$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

- 2) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- 3) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu.
- 4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations.
- 5) Écrire l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.
- 6) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.
- 7) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et dont l'abscisse est $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.
- 8) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0; 1]$ puis vérifier que : $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}$
- 9) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 10) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = [0; 1]$
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Calculer $g\left(\frac{1}{4}\right)$ puis déterminer $(g^{-1})'\left(\frac{49}{64}\right)$.
 - c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 12x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{1+x^2} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f .
- 4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
b) En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f .
- 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0[$ puis vérifier que $\alpha \in \left] \frac{1}{12}; 0 \right]$.
- 7) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 8) Soit g la restriction de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle J .
 - c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Vérifier que : $D_f =]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et interpréter le résultat obtenu.
- 3) a) Montrer que la droite $(D) : y = x - 2$ est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite (D) .
- 4) Étudier la dérivabilité à gauche en 0 de la fonction f puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 6) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
- 7) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 8) a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en unique point et dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $\left[2; \frac{5}{2}\right]$.
b) Montrer que : $\alpha - \sqrt[3]{\alpha} = 1$.
- 9) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 10) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]1; +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Démontrer que g^{-1} est dérivable sur J .
 - c) Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{2(\alpha-1)^3}{1+2(\alpha-1)^3}$.
 - d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.